

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et se porte sur deux pages.

Compte sera tenu de la netteté de la copie.

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$. ($\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$).
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B).$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

2. On pose $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \|I - A\| \leq \frac{1}{2}\}$.

(a) Montrer que

$$\forall A \in E, \quad \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|Df(A)H\| \leq \frac{1}{2}\|H\|.$$

(b) En déduire que pour tous $X, Y \in E$, on a

$$\|f(X) - f(Y)\| \leq \|X - Y\|.$$

3. On suppose que $B \in E$.

(a) Montrer que pour $A \in E$, on a $f(A) \in E$.

(Indication: introduire la matrice $f(I) - I$).

(b) En déduire qu'il existe une unique matrice $A \in E$ qui vérifie $A^2 = B$.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = e^{-\|x\|^2} x.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad Df(x)h = e^{-\|x\|^2} h - 2\langle x, h \rangle e^{-\|x\|^2} x.$$

2. Soit $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in B$.

(Indication: on pourra considérer $\ker(Df(x))$).

3. (a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = te^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de φ et montrer que φ induit une bijection de $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ sur $[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}]$.

- (b) En déduire que f est injective sur la boule B .
4. Montrer que f est un C^1 difféomorphisme de la boule B dans un ouvert que l'on précisera.

Exercice 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2} \sin(y), y + \frac{1}{2} \sin(x)\right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.
2. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = \left(a + \frac{1}{2} \sin(y), b - \frac{1}{2} \sin(x)\right), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

- (b) En déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

5. Calculer $Df^{-1}(0, 0)$.

Barème sur 20 points

Exercice 1: 6 points = (1+1)+(1+1)+(1+1).

Exercice 2: 6 points = (1+1) + 1 + (1,5+0,5) + 1.

Exercice 3: 8 points = (1,5+0,5) + 1,5+1+(1,5+1)+1.

Dr. A. GUEDRAGO, MC

Bonne inspiration

Dr. I. IBRANGO

Contrôle 1 de Calcul Différentiel (03 heures)

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et se porte sur deux pages.
Compte sera tenu de la netteté de la copie.

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1: 7 points = $(0,5+1) + 1,5 + (1+0,5) + ((1+0,5)+1)$.

$\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\operatorname{Arctang}\left(\frac{y}{2}\right) - x, \operatorname{Arctang}\left(\frac{x}{2}\right) + y \right).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.

2. En utilisant l'inégalité

$$|\operatorname{Arctang}(a) - \operatorname{Arctang}(b)| \leq |a - b|$$

déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.

3. Montrer que

$$Df^{-1}[f(x, y)] = [Df(x, y)]^{-1}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

puis déduire $[Df(2, 2)]^{-1}$.

4. (a) Montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq 2\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|.$$

En déduire que la fonction $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne de rapport 2.

(b) Déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Indication: on pourra montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un fermé.

Exercice 2: 7 points = $1 + (1 + (1 + 1) + (1 + 1)) + 1$.

1. Rappeler la définition d'un C^1 -difféomorphisme.

2. On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et on considère $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Montrer que f est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout $X_0 = (x_0, y_0) \in U$ (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de X_0 tel que f soit un C^1 -difféomorphisme de U_0 dans $f(U_0)$).

(b) Quelle formule générale relie la différentielle de f en $X_0 \in U$ à celle de la bijection réciproque associée? Expliciter cette relation à l'aide des matrices jacobienes.

(c) Énoncer le théorème d'inversion globale

Montrer que f n'est pas un C^1 -difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

3. Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme local au voisinage de tout réel alors c'est un C^1 -difféomorphisme global de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Exercice 36 : 6 points = $(0,5+1)+1,5+1+1+1$.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

1. Déterminer le gradient de f et en déduire l'expression de sa différentielle.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Étudier la nature du point critique $(1, -1)$.
4. Montrer que les résultats vus en cours ne permettent pas de conclure quant à la nature du point critique $(0, 0)$.
5. Montrer que $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f .

UNIVERSITÉ NAZI BONI (UNB)
UFR-ST-L3 Licence de Mathématiques-2016-17

Session de rattrapage: Calcul Différentiel (02 h 30 mn)

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et se porte sur une page.
Compte sera tenu de la netteté de la copie.

Attention! Documents, calculatrices et matériels électroniques interdits.

Exercice 1

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme

$$\|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|).$$

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) L'application B est continue.

(b) L'application B est continue en $(0, 0)$.

(c) Il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\text{pour tous } (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|.$$

2. On suppose que E et F sont de dimension finie. Montrer que toutes les applications bilinéaires sont continues.

Exercice 2

$\mathbb{R}^2$ étant muni de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\text{Arctang}\left(\frac{y}{2}\right) - x, \text{Arctang}\left(\frac{x}{2}\right) + y \right).$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.

2. En utilisant l'inégalité

$$|\text{Arctang}(a) - \text{Arctang}(b)| \leq |a - b|$$

déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.

3. Montrer que

$$Df^{-1}[f(x, y)] = [Df(x, y)]^{-1}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

puis déduire $[Df(2, 2)]^{-1}$.

4. (a) Montrer que pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq 2\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|.$$

En déduire que la fonction $f^{-1} : f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est lipschitzienne de rapport 2.

(b) Déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Indication: on pourra montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un fermé.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(x^2 - y^2).$$

Déterminer les points critiques de f et donner leur nature.